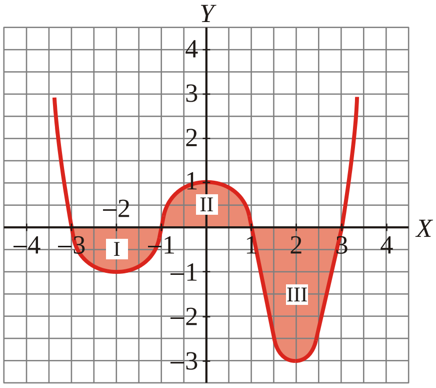
Integral Definida

Ejercicio nº 1.-

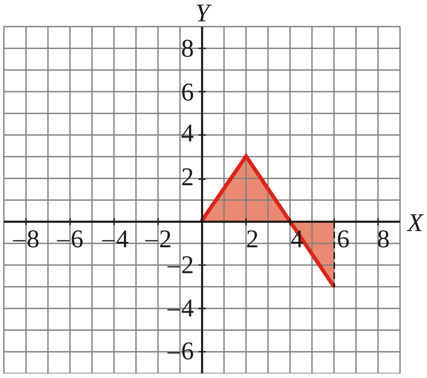
La siguiente gráfica corresponde a la función *f(x)*:



Sabemos que el área del recinto I es $\frac{16}{3}$ u^2; el área del recinto II es $\frac{11}{2}$ u^2; y el área del recinto III es 11u^2. ¿Cuánto valdrá $\int_{-3}^{3} f(x)$?

Ejercicio nº 2.-

Sabiendo que la gráfica de *f(x)* es la siguiente:

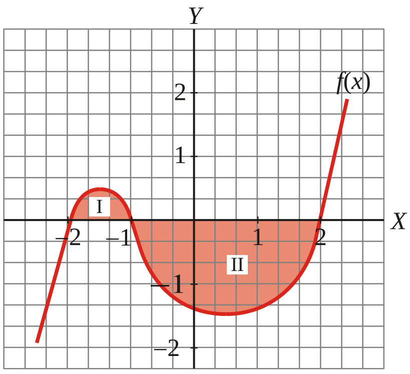


Calcula:

$$\int_{-0}^{6} f(x)$$

Ejercicio nº 3.-

Dada la gráfica de la función *f (x)*:

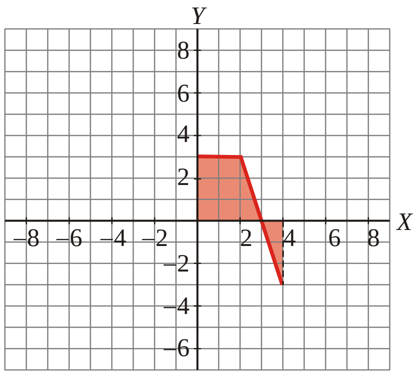


sabiendo que el área del recinto I es 2 u^2 y que el área del recinto II es $\frac{19}{2}$ u^2, calcula:

$$\int_{-2}^{2} f(x)$$

Ejercicio nº 4.-

La gráfica de una cierta función, *f(x)* , es la siguiente:

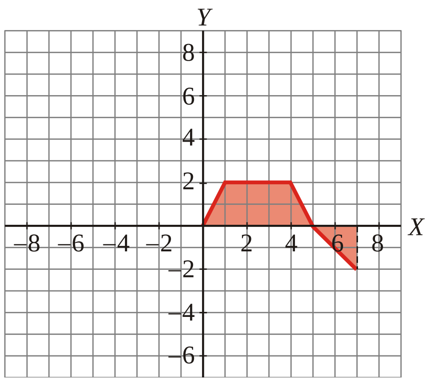


A partir de esta gráfica, calcula:

$$\int_0^4 f(x)$$

Ejercicio nº 5.-

A partir de la gráfica de *f(x)*:



Calcula:

$$\int_0^7 f(x)$$

Ejercicio nº 6.-

Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x$, calcula:

a) $\int_0^6 f(x)$

b) $\int_{-1}^0 f(x)$

Ejercicio nº 7.-

Calcula $\int_0^2 f(x)$, **siendo:**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 2 & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$$

Ejercicio nº 8.-

Calcula:

$$\int_0^1 \left(-\frac{x^4}{3}+2x^2\right)$$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve la siguiente integral:

$$\int_1^3 \left(2x^2+3\right)$$

Ejercicio nº 10.-

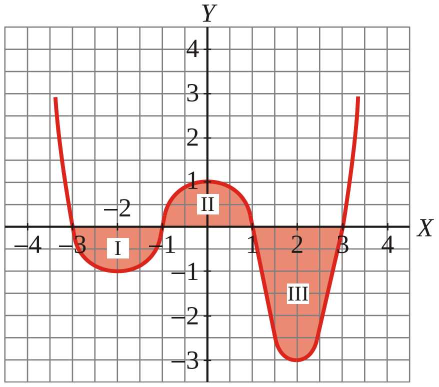
Calcula:

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}$$

Soluciones Integral Definida

Ejercicio nº 1.-

La siguiente gráfica corresponde a la función *f(x)*:



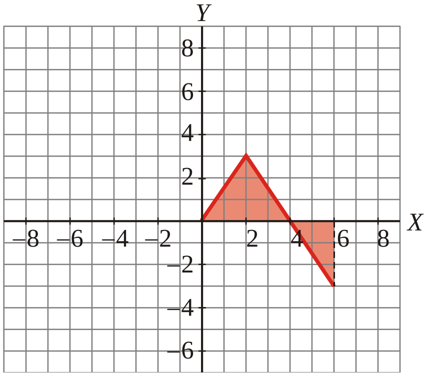
Sabemos que el área del recinto I es $\frac{16}{3}$ u^2; el área del recinto II es $\frac{11}{2}$ u^2; y el área del recinto III es $11u^2$. ¿Cuánto valdrá $\int_{-3}^{3} f(x)$?

Solución:

$$\int_{-3}^{3} f(x) = -\text{área recinto I} + \text{área recinto II} - \text{área recinto III} = -\frac{16}{3} + \frac{11}{2} - 11 = -\frac{65}{6}.$$

Ejercicio nº 2.-

Sabiendo que la gráfica de *f(x)* es la siguiente:



Calcula:

$$\int_{-0}^{6} f(x)$$

Solución:

- Vamos a distinguir dos recintos:

  $\text{I}\left[0,\ 4\right],\ \text{II}\left[4,\ 6\right]$

- El área del recinto I es:

  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6\,u^2$, ya que es un triángulo de base 4 y altura 3.

- El área del recinto II es:

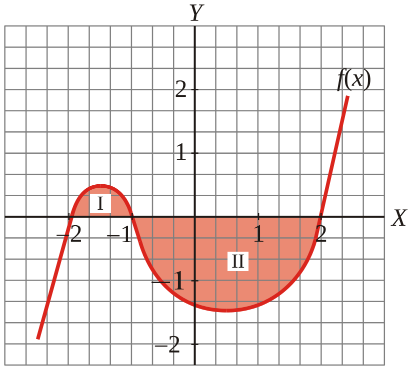
  $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3\,u^2$, ya que es un triángulo de base 2 y altura 3.

- Por tanto:

$$\int_0^6 f(x) = \text{área recinto I} - \text{área recinto II} = 6 - 3 = 3\ u^2$$

Ejercicio nº 3.-

Dada la gráfica de la función *f (x):*



sabiendo que el área del recinto I es $2\,u^2$ y que el área del recinto II es $\frac{19}{2}$ u^2, calcula:

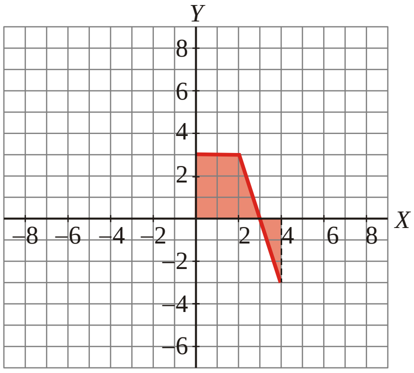
$$\int_{-2}^{2} f(x)$$

Solución:

$$\int_{-2}^{2} f(x) = \text{área recinto I} - \text{área recinto II} = 2 - \frac{19}{2} = \frac{-15}{2}\ u^2$$

Ejercicio nº 4.-

La gráfica de una cierta función, *f(x)* , es la siguiente:



A partir de esta gráfica, calcula:

$$\int_0^4 f(x)$$

Solución:

- Vamos a distinguir dos recintos:

$$\text{I}[0, 3],\ \text{II}[3, 4]$$

- El área del recinto I, que es un trapecio, es:

$$\frac{(3+2)\cdot 3}{2} = \frac{15}{2} u^2$$

- El área del recinto II, que es un triángulo, es:

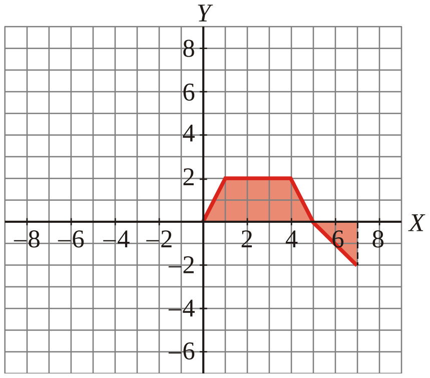
$$\frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2} u^2$$

- Por tanto:

$$\int_0^4 f(x) = \text{área del recinto I} - \text{área del recinto II} = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6\,u^2$$

Ejercicio nº 5.-

A partir de la gráfica de *f(x)*:



Calcula:

$$\int_0^7 f(x)$$

Solución:

- Distinguimos dos recintos:

$\text{I}\left[0,\,5\right],\ \text{II}\left[5,\,7\right]$

- El recinto I es un trapecio y su área es:

$$\frac{(5+3)\cdot 2}{2} = 8u^2$$

- El recinto II es un triángulo y su área es:

$$\frac{2\cdot 2}{2} = 2u^2$$

- Por tanto:

$$\int_0^7 f(x) = \text{área recinto I} - \text{área recinto II} = 8 - 2 = 6\,u^2$$

Ejercicio nº 6.-

Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x$, calcula:

a) $\int_0^6 f(x)$

b) $\int_{-1}^{0} f(x)$

Solución:

- $G(x) = \int (2x^2 - 3x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$

- $G(3) = \frac{9}{2}; \quad G(0) = 0; \quad G(-1) = -\frac{13}{6}$

a) $\int_0^3 f = G(3) - G(0) = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$

b) $\int_{-1}^{0} G(0) - G(-1) = 0 - \left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{13}{6}$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Calcula $\int_0^2 f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Solución:

- Entre 0 y 1:

$$G_1(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G_1(1) = \frac{4}{3}; \; G_1(0) = 0$$

$$\int_0^1 (x^2 + 1) = G_1(1) - G_1(0) = \frac{4}{3}$$

- Entre 1 y 2:

$$G_2(x) = \int 2 = 2x$$

$$G_2(2) = 4; \quad G_2(1) = 2$$

$$\int_1^2 2 = G_2(2) - G_2(1) = 4 - 2 = 2$$

- Por tanto:

$$\int_0^2 f(x) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

Ejercicio nº 8.-

Calcula:

$$\int_0^1 \left(-\frac{x^4}{3} + 2x^2 \right)$$

Solución:

- $G(x) = \int \left(\frac{-x^4}{3} + 2x^2 \right) = \frac{-x^5}{15} + \frac{2x^3}{3}$

- $G(1) = \frac{3}{5}; \quad G(0) = 0$

- $\int_0^1 \left(\frac{-x^4}{3} + 2x^2 \right) = G(1) - G(0) = \frac{3}{5}$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve la siguiente integral:

$$\int_1^3 \left(2x^2 + 3 \right)$$

Solución:

- $G(x) = \int \left(2x^2 + 3 \right) = \frac{2x^3}{3} + 3x$

- $G(3) = 27; \quad G(1) = \frac{11}{3}$

- $\int_1^3 \left(2x^2 + 3 \right) = G(3) - G(1) = 27 - \frac{11}{3} = \frac{70}{3}$

Ejercicio nº 10.-

Calcula:

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}$$

Solución:

- $G(x) = \int \frac{1}{x+1} = ln\,|\,x+1|$

- $G(e-1) = ln\,e = 1; \quad G(0) = \ln 1 = 0$

- $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} = G(e-1) - G(0) = 1 - 0 = 1$